

文章编号:1005-3085(2011)03-0354-11

时滞 Rayleigh 方程的反周期解存在性*

周见文, 李永昆, 王艳宁

(云南大学数学系, 昆明 650091)

摘 要: 本文利用不动点理论中的 Leray-Schauder 度定理, 研究了一类时滞 Rayleigh 方程反周期解的存在性问题. 文中给出了保证反周期解存在的充分条件, 并举例说明所给条件的合理性和广泛性.

关键词: Rayleigh 方程; 时滞; 反周期解; Leray-Schauder 度

分类号: AMS(2000) 34B15

中图分类号: O175.14

文献标识码: A

1 引言

近几年, 非线性微分方程反周期问题引起了许多研究者的广泛关注^[1-4]. 例如, 反周期三角多项式是研究插值问题的重要工具^[5], 文献 [6] 研究了反周期小波问题. 最近, 文献 [7,8] 考虑了 Schrödinger 微分算子和 Hill 微分算子反周期边值问题, 文献 [9] 考虑了一类二阶微分方程反周期边值问题解的存在性, 文献 [10] 研究了高阶微分方程反周期解的存在性和唯一性, 文献 [11] 研究了差分方程的反周期解. 特别地, 文献 [12] 用 Leray-Schauder 度理论研究了如下 Rayleigh 方程的反周期解

$$x''(t) + f(t, x'(t)) + g(t, x(t)) = e(t), \quad (1)$$

其中 $e: R \rightarrow R$ 和 $f, g: R \times R \rightarrow R$ 连续, e 是 T 周期的, f 和 g 关于第一变元是 T 周期的.

由于在诸如物理、机械和工程技术等领域中, 许多数学模型涉及到 Rayleigh 方程或 Rayleigh 系统, 所以其动态行为被广泛研究^[12,13]. 而在这些模型中, 许多 Rayleigh 方程或 Rayleigh 系统具有时滞, 重要的是找到这些 Rayleigh 方程或 Rayleigh 系统的周期解或反周期解. 然而, 目前关于时滞 Rayleigh 方程或 Rayleigh 系统的反周期解存在性的结果并不多见.

受上述研究工作的启发, 本文研究如下时滞 Rayleigh 方程反周期解的存在性

$$x''(t) + f(t, x'(t)) + g(t, x(t - \sigma(t))) = e(t), \quad (2)$$

其中 $f, g \in C(R \times R, R)$, $\sigma, e \in C(R, R)$ 满足以下条件:

(H) 对任意 $t, x \in R$, 有

$$f(t + T, -x) = -f(t, x), \quad g(t + T, -x) = -g(t, x), \quad e(t + T) = -e(t), \quad \sigma(t + T) = \sigma(t),$$

且

$$\int_0^{2T} e(t) dt = 0.$$

本文给出方程 (2) 的一些反周期解存在性的充分条件, 这些结果与以上参考文献的结果不同, 是文献 [12] 的推广.

收稿日期: 2008-12-31. 作者简介: 周见文 (1981年3月生), 男, 博士. 研究方向: 微分方程.

*基金项目: 云南大学第三批“中青年骨干教师培养计划”项目 (21132014).

2 预备知识

在本节中, 我们将给出一些相关的定义、定理和引理.

设 $u: R \rightarrow R$ 连续, $u(t)$ 称为在 R 上是 T -反周期的, 如果

$$u(t+2T) = u(t), \quad u(t+T) = -u(t), \quad \forall t \in R.$$

为了应用 Leray-Schauder 度定理, 我们令

$$C_{2T}^{k,1} = \{x \in C^k(R, R), x(t+T) = -x(t), \forall t \in R\}, \quad k = 0, 1, 2,$$

并赋予其范数 $\|\cdot\|$

$$\|x\| = \max \{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty, \dots, \|x^{(k)}\|_\infty\},$$

其中 $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, 2T]} |x(t)|$, 则 $C_{2T}^{k,1}$ 是 Banach 空间, 记

$$\|x\|_p = \left(\int_0^{2T} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

我们证明如下引理.

引理 1 若 $x \in C_{2T}^{k,1}$, 则 $\|x\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x'\|_1$.

证明 因为 $x \in C_{2T}^{k,1}$, 故

$$\int_0^{2T} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt + \int_T^{2T} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt + \int_0^T x(t+T) dt = 0, \quad (3)$$

因此, 由 (3) 式, 存在常数 $\xi \in [0, 2T]$, 使得 $x(\xi) = 0$. 所以

$$|x(t)| = \left| x(\xi) + \int_\xi^t x'(s) ds \right| \leq \int_\xi^t |x'(s)| ds, \quad t \in [\xi, \xi + 2T], \quad (4)$$

且

$$|x(t)| = |x(t-2T)| = \left| x(\xi) - \int_{t-2T}^\xi x'(s) ds \right| \leq \int_{t-2T}^\xi |x'(s)| ds, \quad t \in [\xi, \xi + 2T]. \quad (5)$$

结合 (4) 和 (5), 得

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{t \in [0, 2T]} |x(t)| = \max_{t \in [\xi, \xi + 2T]} |x(t)| \\ &\leq \max_{t \in [\xi, \xi + 2T]} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_\xi^t |x'(s)| ds + \int_{t-2T}^\xi |x'(s)| ds \right) \right\} \\ &= \max_{t \in [\xi, \xi + 2T]} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\xi-2T}^{t-2T} |x'(s)| ds + \int_{t-2T}^\xi |x'(s)| ds \right) \right\} \\ &= \max_{t \in [\xi, \xi + 2T]} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\xi-2T}^\xi |x'(s)| ds \right\} \leq \frac{1}{2} \|x'\|_1. \end{aligned} \quad (6)$$

为了证明本文的主要结果, 我们引入著名的 Leray-Schauder 度定理.

定理 1^[14] 设 Ω 是实 Banach 空间 X 的有界开子集, 并设 \hat{f} 是 $\bar{\Omega}$ 上的全连续场. 若

$$\deg(\hat{f}, \Omega, p) \neq 0,$$

则 $\hat{f}(x) = p$ 在 Ω 内至少有一个解.

3 主要结果

定理2 设 (H) 成立, 且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, $k, d > 0$, 满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$, 使得

- 1) $|f(t, x)| \leq m_1|x| + k, \forall t \in R, x \in R$;
- 2) $g(t, x)x \geq 0, \forall t \in R, |x| > d$;
- 3) $\limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq m_2$, 对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T -反周期解.

证明 对 $\lambda \in (0, 1]$, 考虑方程系

$$x''(t) + \lambda f(t, x'(t)) + \lambda g(t, x(t - \sigma(t))) - \lambda e(t) = x''(t) + \lambda A(t, x(t - \sigma(t)), x'(t)) = 0. \quad (7)$$

首先我们估计方程系 (7) 解的先验界. 设 $x \in C_{2T}^{1,1}$ 为方程 (7) 的任意一个 T -反周期解, 对 (7) 式两边在 $[0, 2T]$ 上积分, 有

$$\int_0^{2T} (f(t, x'(t)) + g(t, x(t - \sigma(t)))) dt = 0,$$

即

$$\int_0^{2T} f(t, x'(t)) dt = - \int_0^{2T} g(t, x(t - \sigma(t))) dt. \quad (8)$$

由条件 (3), 对

$$\epsilon = \frac{1 - 4T(m_1 + Tm_2)}{8T^2},$$

存在 $c > d$, 使得

$$g(t, x) > (m_2 + \epsilon)x, \quad \forall t \in R, \quad x < -c. \quad (9)$$

记

$$E_1 = \{t \in [0, 2T] : x(t - \sigma(t)) > c\}, \quad E_2 = \{t \in [0, 2T] : |x(t - \sigma(t))| \leq c\},$$

$$E_3 = \{t \in [0, 2T] : x(t - \sigma(t)) < -c\}.$$

当 $E_1 \neq \emptyset$, 由 (8) 式得

$$\begin{aligned} \int_{E_1} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt &= \int_{E_1} g(t, x(t - \sigma(t))) dt \\ &\leq \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + \int_{E_2 \cup E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt, \end{aligned}$$

从而由 (7) 式, 得

$$\int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq 2 \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + 2 \int_{E_2 \cup E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt + \|e\|_1. \quad (10)$$

当 $E_1 = \emptyset$ 时, 得

$$\int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + \int_{E_2 \cup E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt + \|e\|_1, \quad (11)$$

由 (10) 和 (11), 知

$$\int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq 2 \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + 2 \int_{E_2 \cup E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt + \|e\|_1. \quad (12)$$

情形 1 $E_2 \neq \emptyset$.

由于 $x \in C_{2T}^{1,1}$, 故存在 $t_0 \in [0, 2T]$, 使得 $x'(t_0) = 0$, 因此由式 (12), 得

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq |x'(t_0)| + \int_{t_0}^t |x''(t)| dt \leq \int_0^{2T} |x''(t)| dt \\ &\leq 2 \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + 2 \int_{E_2 \cup E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt + \|e\|_1. \end{aligned} \quad (13)$$

另一方面, 由条件 (1) 及引理 1 知

$$\int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt \leq m_1 \int_0^{2T} |x'(t)| dt + 2Tk = m_1 \|x'\|_1 + 2Tk, \quad (14)$$

$$\int_{E_2} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt \leq 2T\bar{g}, \quad (15)$$

其中 $\bar{g} = \max\{|g(t, x)| : t \in [0, 2T], |x| \leq c\}$, 又

$$\begin{aligned} \int_{E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt &\leq \int_{E_3} (m_2 + \epsilon) |x(t - \sigma(t))| dt \\ &\leq 2T(m_2 + \epsilon) \|x\|_\infty \leq T(m_2 + \epsilon) \|x'\|_1. \end{aligned} \quad (16)$$

从而由 (13)-(16) 导出

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq \int_0^{2T} |x''(t)| dt \\ &\leq 2(m_1 + T(m_2 + \epsilon)) \|x'\|_1 + 4Tk + 4T\bar{g} + \|e\|_1, \end{aligned} \quad (17)$$

因此

$$\|x'\|_1 \leq 4T(m_1 + T(m_2 + \epsilon)) \|x'\|_1 + 8T^2k + 8T^2\bar{g} + 2T\|e\|_1,$$

即

$$\|x'\|_1 \leq \frac{8T^2k + 8T^2\bar{g} + 2T\|e\|_1}{1 - 4T(m_1 + T(m_2 + \epsilon))} = M_0 > 0. \quad (18)$$

由引理 1 及式 (17) 和 (18) 知, 存在 $M_1, M_2 > 0$, 使得

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{2}M_0 = M_1, \quad \|x'\|_\infty \leq 2(m_1 + T(m_2 + \epsilon))M_0 + 4Tk + 4T\bar{g} + \|e\|_1 = M_2.$$

情形2 $E_2 = \emptyset$.

由 $x(t - \sigma(t))$ 的连续性知 $E_1 \neq \emptyset$, $E_3 = \emptyset$, 或者 $E_1 = \emptyset$, $E_3 \neq \emptyset$.

当 $E_1 \neq \emptyset$, $E_3 = \emptyset$ 时, 由于 $E_2 \cup E_3 = \emptyset$, 由条件(1)及式(10)得

$$|x'(t)| \leq \int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq 2 \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + \|e\|_1 \leq 2m_1 \|x'\|_1 + 4Tk + \|e\|_1, \quad (19)$$

即

$$\|x'\|_1 \leq 4Tm_1 \|x'\|_1 + 8T^2k + 2T\|e\|_1,$$

亦即

$$\|x'\|_1 \leq \frac{8T^2k + 2T\|e\|_1}{1 - 4Tm_1} = M_3 > 0.$$

由引理1及(19)式知, 存在 $M_4, M_5 > 0$, 使得

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x'\|_1 \leq \frac{1}{2} M_3 = M_4, \quad \|x'\|_\infty \leq 2m_1 M_3 + 4Tk + \|e\|_1 = M_5.$$

当 $E_1 = \emptyset$, $E_3 \neq \emptyset$, 由(11)得

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} |x''(t)| dt &\leq \int_0^{2T} |f(t, x'(t))| dt + \int_{E_3} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt + \|e\|_1 \\ &\leq m_1 \|x'\|_1 + 2Tk + 2T(m_2 + \epsilon) \|x\|_\infty + \|e\|_1 \\ &\leq (m_1 + T(m_2 + \epsilon)) \|x'\|_1 + 2Tk + \|e\|_1, \end{aligned} \quad (20)$$

而 $x \in C_{2T}^{1,1}$, 因此存在 $t_1 \in [0, 2T)$, 使得 $x'(t_1) = 0$, 从而由上式知

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq |x'(t_1)| + \int_{t_1}^t |x''(t)| dt \\ &\leq \int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq (m_1 + T(m_2 + \epsilon)) \|x'\|_1 + 2Tk + \|e\|_1. \end{aligned} \quad (21)$$

于是有

$$\|x'\|_1 \leq 2T \int_0^{2T} |x''(t)| dt \leq 2T(m_1 + T(m_2 + \epsilon)) \|x'\|_1 + 4T^2k + 2T\|e\|_1,$$

即

$$\|x'\|_1 \leq \frac{4T^2k + 2T\|e\|_1}{1 - 2T(m_1 + T(m_2 + \epsilon))} = M_6 > 0.$$

由引理1及(21)式知, 存在 $M_7, M_8 > 0$, 使得

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x'\|_1 \leq \frac{1}{2} M_6 = M_7, \quad \|x'\|_\infty \leq (m_1 + T(m_2 + \epsilon)) M_6 + 2Tk + \|p\|_1 = M_8,$$

因此

$$\|x\| = \max \{ \|x\|_\infty, \|x'\|_\infty \} < \max \{ M_1, M_2, M_4, M_5, M_7, M_8 \} + 1 = M.$$

令

$$\Omega = \{x \in C_{2T}^{1,1} : \|x\| < M\},$$

则方程 (7) 在 $\partial\Omega$ 上没有 T -反周期解.

若 $x \in C_{2T}^{k,1}$ ($k = 0, 1, 2$), 则其有傅里叶展式

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_{2i+1} \cos \frac{\pi(2i+1)t}{T} + b_{2i+1} \sin \frac{\pi(2i+1)t}{T} \right).$$

定义算子 $L: C_{2T}^{k,1} \rightarrow C_{2T}^{k+1,1}$ ($k = 0, 1$) 如下

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \int_0^t x(s) ds - \frac{T}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{2i+1} \\ &= \frac{T}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a_{2i+1}}{2i+1} \sin \frac{\pi(2i+1)t}{T} - \frac{b_{2i+1}}{2i+1} \cos \frac{\pi(2i+1)t}{T} \right), \end{aligned}$$

则

$$\frac{d}{dt}(Lx)(t) = x(t), \quad (22)$$

且

$$\begin{aligned} |(Lx)(t)| &\leq \int_0^{2T} |x(s)| ds + \frac{T}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|b_{2i+1}|}{2i+1} \\ &\leq 2T\|x\| + \frac{T}{\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{2i+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

应用

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

和 Parseval 恒等式

$$\int_0^{2T} |x(s)|^2 ds = T \sum_{i=0}^{\infty} (a_{2i+1}^2 + b_{2i+1}^2),$$

知: 对任意的 $t \in [0, 2T]$, 有

$$\begin{aligned} |(Lx)(t)| &\leq 2T\|x\| + \frac{T}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (a_{2i+1}^2 + b_{2i+1}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2T\|x\| + \frac{T}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{T} \int_0^{2T} |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2T + \frac{T}{2} \right) \|x\|. \end{aligned}$$

结合式 (22) 得

$$\|Lx\| \leq \max \left\{ 1, 2T + \frac{T}{2} \right\} \|x\|,$$

因此, L 连续.

对任意的 $x \in C_{2T}^{k,1}$ ($k = 0, 1, 2$), 由条件 (H), 有

$$A(t+T, x(t+T-\sigma(t+T)), x'(t+T)) = -A(t, x(t-\sigma(t)), x'(t)),$$

故 $A \in C_{2T}^{0,1}$. 定义 $F_\lambda: \bar{\Omega} \rightarrow C_{2T}^{2,1} \subset C_{2T}^{1,1}$ 如下

$$F_\lambda(x) = \lambda L(L(-A(x))) = \lambda L^2(-A(x)), \quad \lambda \in [0, 1].$$

由 Arzela-Ascoli 定理知 F_λ 全连续, 并且 F_1 在 $\bar{\Omega}$ 上的不动点就是方程 (2) 的 T 反-周期解.

定义如下同伦

$$H: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow C_{2T}^{1,1}, \quad H(\lambda, x) = x - F_\lambda(x).$$

由以上讨论知, 对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, $x \in \partial\Omega$, 有 $H(\lambda, x) \neq 0$, 从而由 Leray-Schauder 度的同伦不变性知

$$\deg\{I - F_1, \Omega, 0\} = \deg\{I, \Omega, 0\} \neq 0.$$

因此, 由定理 1 知 $x - F_1(x) = 0$ 在 Ω 内至少有一解, 即 F_1 在 $\bar{\Omega}$ 上至少有一个不动点. 从而, 方程 (2) 有一个 T 反-周期解. 证毕

同理可得如下定理.

定理 3 设 (H) 成立, 且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, $k, d > 0$ 满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$, 使得

- 1) $|f(t, x)| \leq m_1|x| + k, \forall t \in R, x \in R;$
- 2) $g(t, x)x \geq 0, \forall t \in R, |x| > d;$
- 3') $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq m_2$, 对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T -反周期解.

定理 2 和定理 3 中的条件 (2) 可用极限形式代替, 得如下定理.

定理 4 设 (H) 成立, 且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, $k > 0$ 满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$, 使得

- 1) $|f(t, x)| \leq m_1|x| + k, \forall t \in R, x \in R;$
- 3'') $\limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq m_2, \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1, \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1$, 对 $t \in R$ 一致成立, 或者 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq m_2, \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1, \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1$, 对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T -反周期解.

证明 由于

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1, \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} > m_1,$$

对 $t \in R$ 一致成立, 故存在 $d_1 > 0$, 使得

$$g(t, x)\text{sign}x > m_1|x| + k > 0, \quad |x| > d_1,$$

因此, 对任意的 $t \in R, |x| > d_1$, 有 $g(t, x)x \geq 0$. 由定理 2 和定理 3 知结论成立. 证毕

如果 $f(t, x) = f(x)$, 则有如下定理.

定理 5 设 (H) 成立, 且存在 $\eta > r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, a > 0, p \geq 1$, 满足 $r_1 + 2^{p-1}T^p r_2 < \eta$ 和连续函数 $h: R \rightarrow R$, 使得

- 4) $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|h(x)|}{|x|^p} \leq r_1$ 且 $f(x) \geq \eta|x|^p + h(x), \forall x \in R;$
- 5) $\limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{|g(t, x)|}{|x|^p} \leq r_2$, 对 $t \in R$ 一致成立, 或者 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{|g(t, x)|}{|x|^p} \leq r_2$, 对 $t \in R$ 一致成立;
- 6) $g(t, x)x \geq 0, |x| > a, \forall t \in R;$

则方程 (2) 至少有一个 T -反周期解.

证明 我们只证 $\limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{|g(t, x)|}{|x|^p} \leq r_2$ 的情形, 另一情形类似可证. 和定理 2 的证明一样, 对 $\lambda \in (0, 1]$, 我们只需考虑方程系

$$x''(t) + \lambda f(x'(t)) + \lambda g(t, x(t - \sigma(t))) - \lambda e(t) = x''(t) + \lambda A(t, x(t - \sigma(t)), x'(t)) = 0, \quad (23)$$

并估计其解的先验界.

设 $x \in C_{2T}^{1,1}$ 为方程 (23) 的任意一个 T -反周期解, 对 (23) 式两边在 $[0, 2T]$ 上积分, 有

$$\int_0^{2T} f(x'(t)) dt + \int_0^{2T} g(t, x(t - \sigma(t))) dt = 0. \quad (24)$$

令

$$E_4 = \{t \in [0, 2T] : |x'(t)| \leq a\}, \quad E_5 = \{t \in [0, 2T] : |x'(t)| > a\},$$

由条件 (4) 知

$$\eta \int_{E_5} |x'(t)|^p dt \leq \int_{E_5} f(x'(t)) dt - \int_{E_5} h(x'(t)) dt, \quad (25)$$

记

$$f_a = \max \{|f(x)| : |x| \leq a\}, \quad h_a = \max \{|h(x)| : |x| \leq a\}, \quad b = 2Tf_a + 2Th_a + 2T\eta a^p,$$

则由

$$\eta \int_{E_4} |x'(t)|^p dt - \int_{E_4} f(x'(t)) dt + \int_{E_4} h(x'(t)) dt \leq b,$$

知

$$\eta \int_{E_4} |x'(t)|^p dt \leq \int_{E_4} f(x'(t)) dt - \int_{E_4} h(x'(t)) dt + b. \quad (26)$$

从而由式 (24)-(26) 导出

$$\begin{aligned} \eta \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt &\leq \int_0^{2T} f(x'(t)) dt - \int_0^{2T} h(x'(t)) dt + b \\ &\leq \int_0^{2T} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt - \int_0^{2T} h(x'(t)) dt + b. \end{aligned} \quad (27)$$

由条件 (4) 和 (5), 对 $\epsilon = \frac{\eta - r_1 - 2^{p-1}T^p r_2}{2^p + 2}$, 存在 $r > a$, 使得

$$\frac{|g(t, x)|}{|x|^p} < r_2 + \epsilon, \quad x < -r, \quad (28)$$

$$\frac{|h(x)|}{|x|^p} < r_1 + \epsilon, \quad |x| > r. \quad (29)$$

令

$$E_6 = \{t \in [0, 2T] : x(t - \sigma(t)) > r\}, \quad E_7 = \{t \in [0, 2T] : |x(t - \sigma(t))| \leq r\},$$

$$E_8 = \{t \in [0, 2T] : x(t - \sigma(t)) < -r\},$$

由式 (24) 得

$$\int_{E_6 \cup E_7 \cup E_8} g(t, x(t - \sigma(t))) dt = \int_0^{2T} g(t, x(t - \sigma(t))) dt = - \int_0^{2T} f(x'(t)) dt,$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{E_6} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt &= \int_{E_6} g(t, x(t - \sigma(t))) dt \\ &\leq \int_{E_7 \cup E_8} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt - \int_0^{2T} f(x'(t)) dt. \end{aligned}$$

故由 (27) 式可导出

$$\begin{aligned} \eta \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt &\leq 2 \int_{E_7 \cup E_8} |g(t, x(t - \sigma(t)))| dt - \int_0^{2T} f(x'(t)) dt - \int_0^{2T} h(x'(t)) dt + b \\ &\leq 4Tg_r + 4(r_1 + \epsilon)T\|x\|_\infty^p - \eta \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt - 2 \int_0^{2T} h(x'(t)) dt + b, \end{aligned}$$

即

$$\eta \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt \leq 2Tg_r + 2(r_1 + \epsilon)T\|x\|_\infty^p - \int_0^{2T} h(x'(t)) dt + \frac{1}{2}b,$$

其中 $g_r = \max\{|g(t, x)| : t \in [0, 2T], |x| \leq r\}$. 令

$$E_9 = \{t \in [0, 2T] : |x'(t)| \leq r\}, \quad E_{10} = \{t \in [0, 2T] : |x'(t)| > r\},$$

则由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \eta \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt &\leq 2Tg_r + 2(r_1 + \epsilon)T\|x\|_\infty^p + \int_{E_9} |h(x'(t))| dt + \int_{E_{10}} |h(x'(t))| dt + \frac{1}{2}b \\ &\leq 2Tg_r + 2(r_1 + \epsilon)T\|x\|_\infty^p + 2Th_r + (r_1 + \epsilon) \int_0^{2T} |x'(t)|^p dt + \frac{1}{2}b \\ &\leq 2Tg_r + (r_1 + \epsilon)T\|x'\|_1^p + 2Th_r + (r_1 + \epsilon)\|x'\|_p^p + \frac{1}{2}b \\ &\leq (r_1 + \epsilon)\|x'\|_p^p + (r_1 + \epsilon)T(2T)^{p-1}\|x'\|_p^p + 2Tg_r + 2Th_r + \frac{1}{2}b, \end{aligned}$$

故

$$\eta\|x'\|_p^p \leq (r_1 + \epsilon + 2^{p-1}(T)^p(r_2 + \epsilon))\|x'\|_p^p + 2Tg_r + 2Th_r + \frac{1}{2}b,$$

其中 $h_r = \{|h(x)| : |x| \leq r\}$. 由于 $\eta - (r_1 + \epsilon + 2^{p-1}(T)^p(r_2 + \epsilon)) > 0$, 所以存在 $M_9 > 0$, 使得 $\|x'\|_p \leq M_9$. 从而可得

$$\|x'\|_1 \leq (2T)^{\frac{p-1}{p}}\|x'\|_p \leq (2T)^{\frac{p-1}{p}}M_9.$$

由引理 1 知

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{2}(2T)^{\frac{p-1}{p}}M_9 = M_{10}.$$

为了估计 $\|x'\|_\infty$ 的界, 在方程系 (23) 两边同时乘以 $x''(t)$, 然后在 $[0, 2T]$ 上积分得

$$\begin{aligned}\|x''\|_2^2 &\leq \int_0^{2T} |g(t, x(t - \sigma(t)))| |x''(t)| dt + \int_0^{2T} |e(t)| |x''(t)| dt \\ &\leq \sqrt{2T} g_{M_{10}} \|x''\|_2 + \|e\|_2 \|x''\|_2,\end{aligned}$$

其中 $g_{M_{10}} = \max\{|g(t, x)| : t \in [0, 2T], |x| \leq M_{10}\}$. 因而可得

$$\|x''\|_2 \leq \sqrt{2T} g_{M_{10}} + \|e\|_2, \quad \|x''\|_1 \leq \sqrt{2T} \|x''\|_2 \leq 2T g_{M_{10}} + \sqrt{2T} \|e\|_2,$$

所以我们有

$$\|x'\|_\infty \leq \|x''\|_1 \leq 2T g_{M_{10}} + \sqrt{2T} \|e\|_2 = M_{11}.$$

综上所述, $\|x\| \leq \max\{M_{10}, M_{11}\}$, 和定理 2 的证明一样, 可得该结论成立.

证毕

下面给出两个例子说明本文所得结果的有效性.

例 1 考虑下面的时滞 Rayleigh 方程

$$x''(t) + \frac{1}{512\pi} \sin(2t)x'(t) + \frac{1}{32\pi^2} (\cos 2t + 2)x\left(t - \frac{1}{2} \sin(2t + 1)\right) = \sin t, \quad (30)$$

由于

$$\begin{aligned}f(t, x) &= \frac{1}{512\pi} \sin(2t)x, \quad g(t, x) = \frac{1}{32\pi^2} (\cos 2t + 2)x, \\ \sigma(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t + 1), \quad e(t) = \sin t, \quad T = \pi,\end{aligned}$$

易验证定理 2 的条件 (H), 1), 2) 和 3) 都满足, 由定理 2 知: 方程 (30) 至少有一个 T -反周期解.

例 2 考虑如下时滞 Rayleigh 方程

$$x''(t) + 2(x'(t))^3 + x'(t) + (\sin 2t + 3)x(t - \cos 2t) = \frac{1}{3} \sin t, \quad (31)$$

因为

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 + x, \quad h(x) = -2|x|^4 + 2x^3 + x, \\ g(t, x) &= (\sin 2t + 3)x, \quad \sigma(t) = \cos 2t, \quad e(t) = \frac{1}{3} \sin t,\end{aligned}$$

且 $T = \pi$, $p = 4$, 所以定理 5 的条件满足, 由定理 5 知: 方程 (31) 至少有一个 T -反周期解.

参考文献:

- [1] Chen T, Liu W, Zhang J, et al. The existence of anti-periodic solutions for Liénard equations[J]. Journal of Mathematical Study, 2007, 40: 187-195
- [2] Aftabizadeh A R, Aizicovici S, Pavel N H. On a class of second-order anti-periodic boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 171: 301-320
- [3] Chen Y, Nieto J J, Oregan D. Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46: 1183-1190
- [4] Aizicovici S, McKibben M, Reich S. Anti-periodic solutions to nonmonotone evolution equations with discontinuous nonlinearities[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 43: 233-251

- [5] Du J Y, Han H L, Jin G X. On trigonometric and paratrigonometric Hermite interpolation[J]. Journal of Approximation Theory, 2004, 131: 74-99
- [6] Chen H L. Antiperiodic wavelets[J]. Journal of Computational Mathematics, 1996, 14: 32-39
- [7] Djiakov P, Mityagin B. Spectral gaps of the periodic Schrödinger operator when its potential is an entire function[J]. Advances in Applied Mathematics, 2003, 31: 562-596
- [8] Djiakov P, Mityagin B. Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential[J]. Journal of Approximation Theory, 2005, 135: 70-104
- [9] Wang W B, Shen J H. Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 598-605
- [10] Kleinert H, Chervyakov A. Functional determinants from Wronski Green function[J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40: 6044-6051
- [11] Wang Y, Shi Y M. Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 309: 56-69
- [12] Liu B W. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 2850-2856
- [13] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977
- [14] Gaines R E, Mawhin J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977

Anti-periodic Solutions for Rayleigh Equations with Delay

ZHOU Jian-wen, LI Yong-kun, WANG Yan-ning

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091)

Abstract: In this paper, we study the existence of anti-periodic solutions for a kind of Rayleigh equations with delay by using the fixed theorem of the Leray-Schauder degree theory. We obtain sufficient conditions for the existence of anti-periodic solutions. Finally, two examples are presented to illustrate the feasibility and effectiveness of the sufficient conditions.

Keywords: Rayleigh equation; delay; anti-periodic solutions; Leray-Schauder degree

Received: 31 Dec 2008. **Accepted:** 20 Jan 2010.

Foundation item: The Third Batch "Training Plan for Key Young Teachers" of Yunnan University (21132014).